平成２０年度　広島大学大学院理学研究科入学試験問題

数理分子生命理学専攻	専門科目

平成１９年8月２２日　　１３：３０ ～ １６：３０

注 意 事 項

(1) 以下の用紙が配布されている。
　問題用紙（表紙を含む）　２１枚
　解答用紙（表紙を含む）　5枚
　下書き用紙　1枚
(2) 問題は，化学，生物学，数学一般，物理学分野から合計２２題ある。この中から４題を選択し，解答せよ。
(3) 解答用紙の表紙に受験番号と選択した問題の番号を記入せよ。
(4) 解答は問題ごとに別々の解答用紙を用い，それぞれの解答用紙に選択した問題番号と受験番号を記入し解答せよ。紙面が不足した場合は裏面も使用してよい。
(5) 下書用紙に受験番号を記入せよ。
(6) 試験終了時には，すべての解答用紙および下書用紙を提出すること。

問題［１］

以下の問１～問３に答えよ。

問１　電子基底状態にある分子は，光を吸収して電子励起状態となる。電子励起状態分子は，その後種々の過程を経てエネルギーを失い基底状態にもどる。この過程を緩和過程という。分子のエネルギー準位と，電子励起状態にある分子が緩和する過程を示した図（修正ヤブロンスキーダイヤグラム）を描き，励起状態からの緩和過程について説明せよ。

問２　一重項励起状態と三重項励起状態の特徴について説明せよ。

問３　ケイ光スペクトルと吸収スペクトルとの関係について説明せよ。

問題[2]

298K，標準状態における次の反応(A)について，以下の問１～問３に答えよ。
ただし，表に反応(A)に関わる各物質の標準生成エンタルピーと定圧熱容量を示す。

$$\mathrm{CO\ (g) + H_2O\ (g) \rightarrow CO_2\ (g) + H_2\ (g)} \qquad \text{(A)}$$

物質	CO (g)	H_2O (g)	CO_2 (g)	H_2 (g)
標準生成エンタルピー (kJ/mol)	−110	−240	−390	0
定圧熱容量 (J/(K・mol))	29	34	37	30

（ただし，(g)は気体を表す。）

問１　反応(A)に関わる各物質の生成反応は発熱反応かそれとも吸熱反応か，その判断理由を付して答えよ。

問２　反応(A)に関わる各物質の生成反応と反応(A)を用いたBorn-Haber（ボルン-ハーバー）サイクルを図示せよ。

問３　Kirchhoff（キルヒホッフ）の法則を使って，500K，標準状態における標準反応エンタルピーを求めよ。ただし，定圧熱容量は温度に依存しないとする。

問題［３］

以下の問１と問２に答えよ。

問１（１）　２つの温度 T_1，T_2 における平衡定数が，それぞれ K_1，K_2 であるときに成り立つ以下の関係式を導け。ただし ΔH°，R をそれぞれ標準反応エンタルピー，気体定数とする。

$$\ln K_2 - \ln K_1 = -\frac{\Delta H^\circ}{R}\left(\frac{1}{T_2} - \frac{1}{T_1}\right)$$

（２）　温度を 25℃から 10℃上昇させたときに，平衡定数が（a）２倍になる反応，（b）半分になる反応，の標準反応エンタルピーはそれぞれいくらか。K_2 / K_1 の比に着目して求めよ。必要ならば $\ln 2 \doteqdot 0.693$，$R = 8.31$ $[\mathrm{J \cdot K^{-1} \cdot mol^{-1}}]$ を用いて計算せよ。

問２　オゾンの分解反応 $2O_3 \rightarrow 3O_2$ について，以下の３つの素反応からなる反応機構が提案されている。ここで，k_a，k_b，k_a' はそれぞれ各素反応の速度定数を示す。

$$
\begin{array}{ll}
O_3 \rightarrow O_2 + O & k_a \\
O_2 + O \rightarrow O_3 & k_a' \\
O + O_3 \rightarrow 2O_2 & k_b
\end{array}
$$

（１）　この反応に出てくる物質の反応速度式で，$\frac{d[O]}{dt}$，$\frac{d[O_2]}{dt}$，$\frac{d[O_3]}{dt}$ の３つについてそれぞれ各素反応の速度定数と濃度を用いた式で表せ。

（２）　反応のほとんどの時間域で中間体の濃度は小さくほとんど変化しない，という定常状態を仮定することにより，この反応全体の速度式 $\frac{d[O_3]}{dt}$ を，各素反応の速度定数と $[O_2]$，$[O_3]$ を用いて表せ。

問題［4］

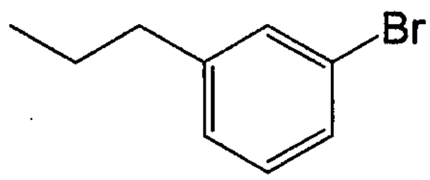
以下の問１～問４に答えよ。

問１　ビニルシクロヘキサンと HBr との反応で，１-ブロモ-１-エチルシクロヘキサンが生成する機構を電子の流れ図を用いて説明せよ。

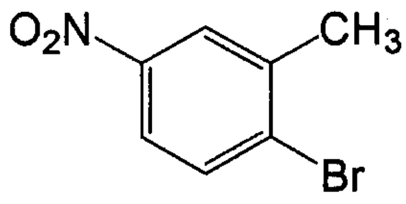
問２　１-メチルシクロヘキセンのオキシ水銀酸化で生成する主生成物を予測し，その構造を記すとともに，この反応機構を電子の流れ図を用いて説明せよ。

問３　*trans*-2-メチルシクロヘキサノールを１-メチルシクロヘキセンから合成する方法を記せ。

問４　ベンゼンから次の化合物 **1** および **2** を合成するための反応経路を示せ。ただし，オルトとパラの異性体は分離できるものとする。



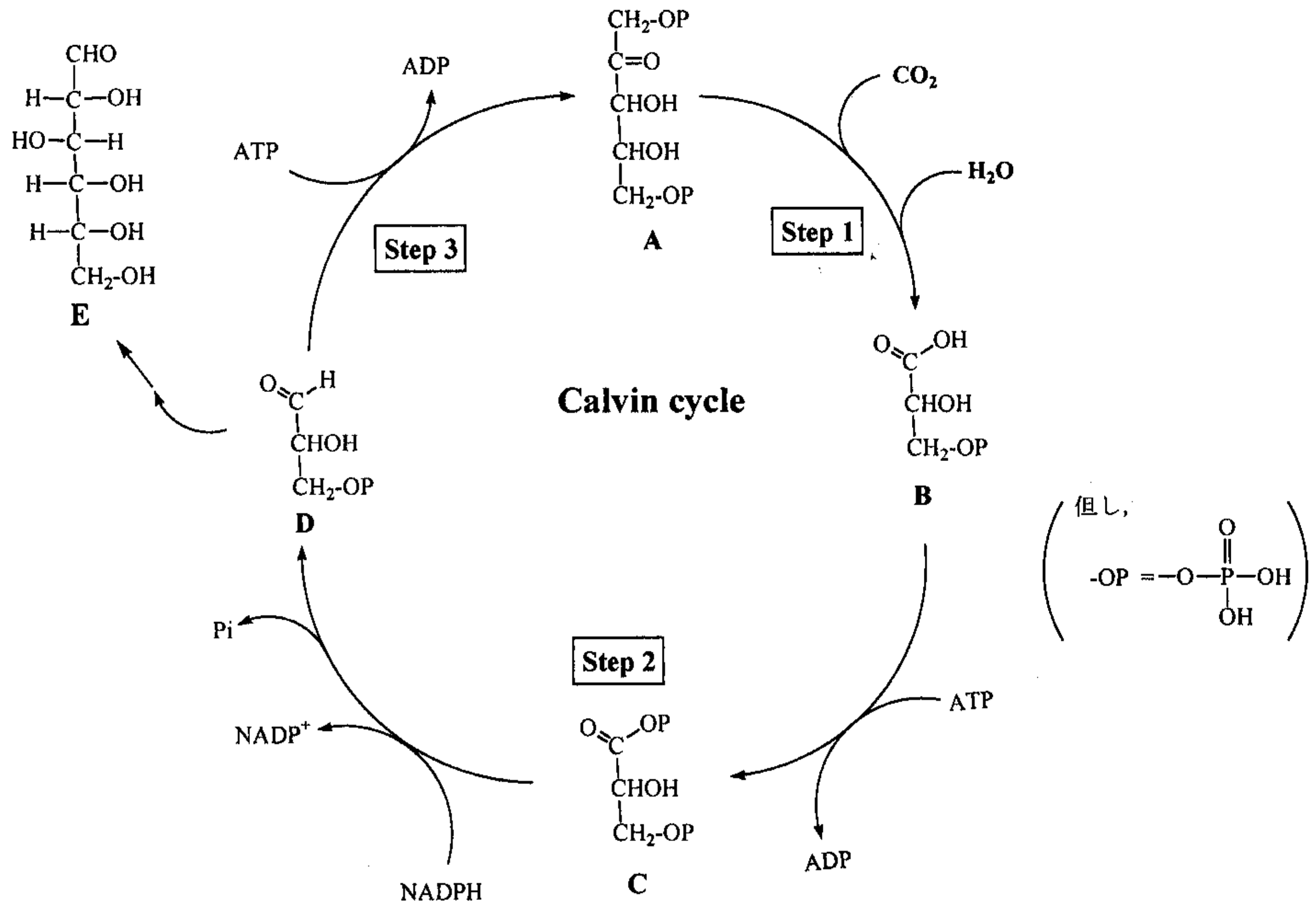
1



2

問題［５］

植物による光合成反応のうち，カルビンサイクルの概要を下図に示した。これを参照にして，以下の問１～問４に答えよ。



問１　カルビンサイクル中の，リブロース－1,5－ビスリン酸（**A**）は，2*R*,3*R* の立体配置である。

（１）**A** の構造を Fisher の投影式で示せ。

（２）このリブロース－1,5－ビスリン酸（**A**）はＤ糖，Ｌ糖のいずれか。

問２　炭酸固定過程（Step　１）により，リブロース－1,5－ビスリン酸（**A**）と二酸化炭素が反応して３－ホスホグリセリン酸（**B**）を生成する過程の反応機構を，電子の流れ図を用いて説明せよ。

問３　３－ホスホグリセリン酸（**B**）からグリセルアルデヒド－３－リン酸（**D**）が生成する還元過程（Step　２）で，中間に生成する化合物（**C**）の化合物名を英語で示せ。

問４　グリセルアルデヒド－３－リン酸（**D**）からグルコース（**E**）が生成される際に，**D** はケトース体（**F**）に異性化する。

（１）この異性化の過程の反応機構を，電子の流れ図を用いて説明せよ。

（２）生成した異性体（**F**）の化合物名を記せ。

（３）生成するグルコース（**E**）の α-アノマー構造を，Haworth の式（または，いす型コンホメーション構造式）によって示せ。

問題［６］

タンパク質の構造に関する以下の文章の空欄(1) ~ (25)にあてはまる適切な語句を答えよ。解答用紙には，空欄番号を明記して解答せよ。

タンパク質は，<u>(1)</u> 種類のアミノ酸から構成されるポリマー（ポリペプチド）である。タンパク質が生体内で機能を発現するには，このポリペプチドが自発的に折れたたまり特定の立体構造を形成することが必要である。タンパク質の立体構造は，タンパク質を構成するアミノ酸配列により一義的に決定されると考えられている。これを提唱者の名前を取って <u>(2)</u> ドグマとよぶ。

タンパク質の立体構造は，階層性をもっている。タンパク質の立体構造は，規則的な部分構造が３次元的に組み上げられたものとして理解できる。タンパク質中に見つかる最も小さな単位の規則的部分構造は，<u>(3)</u> 構造と呼ばれる。この規則的部分構造は，大きく３つに分類され，それらは <u>(4)</u>，<u>(5)</u>，<u>(6)</u> と呼ばれる。これらの規則的部分構造を集積して作られる，ひとつ上の階層に属する部分構造単位は <u>(7)</u> と呼ばれる。この階層に属する構造単位が，タンパク質の機能を発現する最小の構造単位となっていることが多い。タンパク質の中には，複数のポリペプチドが集合して１つのタンパク質として存在するものがある。このようなタンパク質を構成する１つのポリペプチドからなる部分構造は <u>(8)</u> と呼ばれる。また，複数のポリペプチドから構成されて作られるタンパク質の立体構造を，１つのポリペプチドから作られるタンパク質の立体構造（３次構造）に対して <u>(9)</u> 構造とよぶ。

タンパク質の立体構造は，ポリペプチド内で形成される様々な化学結合の微妙なバランスにより形成されている。タンパク質立体構造の安定化に最も寄与しているのは，疎水性相互作用である。これは疎水性アミノ酸（アミノ酸の３文字表記で示すと例えば以下のアミノ酸が該当する <u>(10)</u>，<u>(11)</u>，<u>(12)</u>，<u>(13)</u>，<u>(14)</u>，<u>(15)</u>）が水溶液中で互いに集積しようとする性質により生じる相互作用である。タンパク質中の規則的部分構造の形成には，結合に係わる原子どうしの位置と配向に大きく結合強度が依存する性質を持つ <u>(16)</u> 結合が重要な役割を果たしている。酸性アミノ酸と塩基性アミノ酸の側鎖の間で形成される <u>(17)</u> 結合も，部分構造形成には重要である。酸性アミノ酸は３文字表記で示すと <u>(18)</u>，<u>(19)</u> である。一方，塩基性アミノ酸とは同じく３文字表記では <u>(20)</u>，<u>(21)</u> で表されるアミノ酸である。

タンパク質中には，しばしばアミノ酸間で共有結合を形成してタンパク質構造の安定化に寄与する化学結合が見つかる。この結合を <u>(22)</u> 結合と呼び，この化学結合形成に係わるアミノ酸は３文字表記で <u>(23)</u> と表される。

アミノ酸どうしをつなぐ箇所に形成される化学結合は <u>(24)</u> と呼ばれる。この結合は平面性をもつために，立体的障害のために隣接しているアミノ酸に許容される骨格部の２面角（ϕ, ψ角）には制約が生じる。タンパク質構造中で許容されるこの２面角の範囲を示した図を <u>(25)</u> とよぶ。

問題[7]

DNA の複製と構造に関する以下の問 1 ～問 3 に答えよ。

著作権法の規定によりこの部分の文章は削除した。

問 1　上記の文中の①～⑬に当てはまる用語を答えよ。解答は一般的な名称でよい。解答用紙には番号①～⑬を明示して解答せよ。

問 2　上記の文を参考にして①の模式図を描け。複製関連タンパク質や DNA 部位の名称等も示すこと。

問 3　真核生物における DNA のヌクレオソーム構造について簡潔に説明せよ。

問題[8]

糖代謝に関する以下の文章を読み，問１～問５に答えよ。

グルコースは好気的条件では，解糖系，TCA サイクル，酸化的リン酸化の 3 つの過程を経て代謝される。解糖系の最終産物はピルビン酸である。 ピルビン酸は TCA 回路でさらに代謝される。TCA 回路の産物（A）は酸化的リン酸化過程で ATP の合成に用いられる。このような一連の代謝を経てグルコースがもつエネルギーは，効率よく ATP として取り出される。

問１　TCA 回路から酸化的リン酸化過程へ送られる産物（A）は何か。名称を答えよ。

問２　嫌気的条件では，TCA 回路が停止する。そのため酵母では，グルコースの代謝産物としてエタノールが生成する。この現象はアルコール発酵とよばれる。なぜ，ピルビン酸ではなくエタノールが生成するのか説明せよ。

問３　解糖系，TCA サイクル，酸化的リン酸化がそれぞれ細胞内のどこで行われるか，答えよ。もし，それらがオルガネラの特定の場所で行われる場合には，その名称まで答えること。

問４　酵母によるグルコースの代謝を ^{18}O の同位体でラベルされた酸素を含む空気の下で行った。^{18}O は主に H_2O 中に検出されるか，それとも CO_2 中に検出されるか，理由と合わせて答えよ。

問５　細胞内に ATP やクエン酸が十分にあり，ADP 濃度が低下している状態では，解糖系の反応が抑えられる。①この時に ATP やクエン酸により阻害される酵素の名称を答えよ。②このように，基質以外の物質が活性部位以外に結合することにより酵素活性が変化する酵素は，何とよばれるか。また，③このように生成物が代謝経路の上流に位置する反応を阻害する阻害様式は，何とよばれるか。それぞれ答えよ。

問題[9]

脂質・脂肪酸に関する以下の文章を読み，問１～問７に答えよ。

脂質は，細胞膜の材料や効率のよいエネルギーの貯蔵体として極めて重要な物質である。また，一部の脂質は，生理活性物質の材料やシグナル分子として働く。しかし，脂質の過剰な摂取は，肥満，動脈硬化，心疾患などの原因になるといわれている。さらに最近では，トランス脂肪酸の健康への影響が懸念され，米国では食品中の含量の表示が義務づけられるにようになった。

問１　動物の脂質に含まれる主要な飽和脂肪酸と不飽和脂肪酸の名称を，それぞれ１つ答えよ。

問２　ヒトの必須脂肪酸の名称を１つ答えよ。

問３　プロスタグランジンの材料となる脂肪酸の名称を１つ答えよ。

問４　トランス脂肪酸とは何か説明せよ。また，なぜ健康への影響が懸念されているのか答えよ。

問５　ヒトの脂肪酸の合成について 100 字程度で説明せよ。なお，細胞内のどこで行われるかも記すこと。

問６　脂肪酸の代謝について 100 字程度で説明せよ。なお，細胞内のどこで行われるかも記すこと。

問７　食事から取り入れられた糖は体内で脂肪酸に変換され脂質になることがある。しかし，脂肪酸が糖に変換されグリコーゲンになることはない。その理由を説明せよ。

問題[10]

動物細胞の細胞間シグナル伝達について以下の問1～問3に答えよ。

問1　遠く離れた細胞間のシグナル伝達の方法を２つあげ，それぞれ50字程度で説明せよ。

問2　シグナルは，標的細胞の受容体タンパク質を介して伝達される。細胞表面にある受容体のほとんどは，以下の３つのファミリーのどれかに属している。これらの細胞表面受容体がシグナルを受容して細胞内へシグナルを伝えるしくみについて，それぞれ100字程度で説明せよ。

（1）イオンチャネル連結型受容体
（2）Gタンパク質連結型受容体
（3）酵素連結型受容体

問3　発生過程のある細胞群に，酵素連結型の細胞表面受容体Xが発現していた。この受容体Xを介したシグナルの働きを調べる方法として，受容体X変異体の過剰発現が考えられる。どのような変異体遺伝子の作製および導入が必要か，その変異体がシグナル伝達に与える影響を含めて150字程度で説明せよ。

問題［11］

リボソームにおけるタンパク質の合成（翻訳）について以下の問１～問３に答えよ。

問１　リボソームの小サブユニットが mRNA 上の翻訳開始コドン（AUG）を認識する機構について，原核細胞と真核細胞における違いを説明せよ。

問２　原核細胞のリボソーム上でポリペプチド鎖が伸長する機構について，以下の用語を用いて説明せよ。図を用いてもよい。

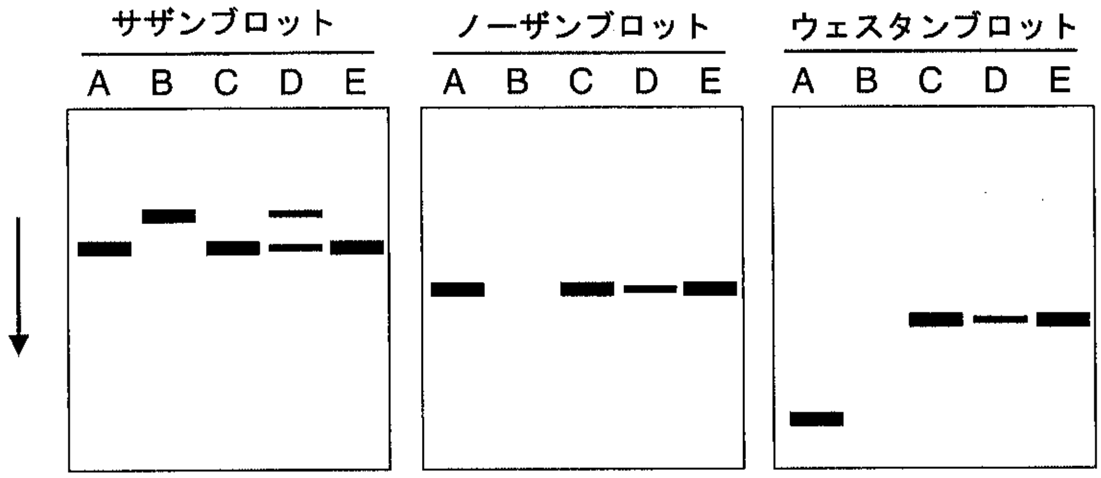
A 部位，P 部位，E 部位，EF-Tu，EF-G，アミノアシル tRNA

問３　翻訳終了を指定する３つのコドンを記せ。また，原核細胞の終結因子による翻訳終了の機構を説明せよ。

問題[12]

遺伝病に関する以下の文を読み，問１〜問４に答えよ。

ヒトの遺伝性疾患の多くは染色体上の一遺伝子変異に起因し，メンデル遺伝に従い劣性ホモ接合体で発症する。このような単一遺伝子病であるＸについて，以下のことがわかっている。遺伝病Ｘは，酵素Ｙの活性が完全に欠失することで発症する。酵素Ｙは，翻訳後修飾を受けない単量体タンパク質で，常染色体上にシングルコピーで存在する遺伝子Ｚにコードされている。この遺伝病の発症者（Ａ，Ｂ，Ｃ）と健常者（Ｄ，Ｅ）から検体を取得し，それぞれから核 DNA，全 RNA およびタンパク質画分を調製した。これらを用い，遺伝子Ｚとその発現について，サザン，ノーザンおよびウェスタンブロット解析を行なった。サザンブロット解析では核 DNA を適当な制限酵素で切断後，プローブとして遺伝子Ｚの全長 cDNA を用いた。ノーザンブロット解析でも同じプローブを使用した。ウェスタンブロット解析では，精製した酵素Ｙに対して作製したポリクローナル抗体を用いた。得られた各ブロットを下図に示す。これらのブロット上で，非特異的なシグナルは検出されなかった。なお，図中左端の矢印はゲル電気泳動の向きを示し，各ブロットにおける泳動サンプル量は検体間で等しいものとする。



問１　下線部について，このような遺伝病の具体例を一つあげ，発症メカニズムなどを含め200字程度で説明せよ。

問２　この実験結果から，遺伝病Ｘの発症に関わる遺伝子Ｚの対立遺伝子は少なくともいくつ存在すると考えられるか。理由とともに答えよ。

問３　それぞれの発症者について，どのような突然変異が遺伝子Ｚに生じたと考えられるか。突然変異が遺伝子Ｚの機能発現にあたえる影響も含めて説明せよ。

問４　Ｃと同じ遺伝子型を持つ男性と，Ｅと同じ遺伝子型を持つ女性との間に子供が生まれた場合，その子供が遺伝病Ｘを発症する確率を理由とともに答えよ。複数の解答が考えられる場合は，全てについて答えよ。

問題 [13]

$f(x,y) = x^3 + y^3 - 3xy$ として，以下の問いに答えよ。

問 1　$f(x,y)$ の停留点を全て求めよ。ただし停留点とは $\dfrac{\partial f}{\partial x}(x,y) = \dfrac{\partial f}{\partial y}(x,y) = 0$ を満たす点 (x,y) のことである。

問 2　$f(x,y)$ の極値を求めよ。

問 3　問 2 で求めた極値は最大値または最小値になっているか。

問題 [14]

2 次正方行列 A は相異なる固有値 λ_1, λ_2 をもつとする。$P = \dfrac{A - \lambda_2 E}{\lambda_1 - \lambda_2}$, $Q = E - P$ とおくとき，以下の問いに答えよ。ただし，E は 2 次単位行列とする。

問 1　$P^2 = P, Q^2 = Q, PQ = QP = O$ が成立することを示せ。ただし，O は 2 次零行列とする。

問 2　$A = \alpha P + \beta Q$ を満たすスカラー α, β を 1 組求めよ。

問 3　$A = \begin{pmatrix} 4 & -2 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$ とする。n を自然数とするとき, A^n を求めよ。

問題 [15]

実変数実数値の関数 $p(r)$ を用いて，複素関数 $f(z)$ が，

$$f(z) = p(|z|)\bar{z}$$

の形で与えられているとする。ただし，$z = x + \mathrm{i}y$, $x, y \in \mathbf{R}$, $\bar{z} = x - \mathrm{i}y$ (複素共役)，$|z| = \sqrt{x^2 + y^2}$ であり，また，$p(1) = 1$ とする。このとき，以下の問いに答えよ。

問 1　$r = \sqrt{x^2 + y^2}$ とおき，$f(z)$ についてのコーシー・リーマンの関係式を r, $p(r)$, $p'(r)$ を用いて書け。

問 2　$f(z)$ が正則であるとき，問 1 の結果を用いて，$p(r)$ を求めよ。

問 3　問 2 で求めた $f(z)$ に対して，積分 $\oint_{S^1} f(z)dz$ の値を計算せよ。ただし，S^1 は原点を中心とする半径 1 の円周を表わす。

問 4　一般に複素関数 $g(z)$ を $g(z) = u(x, y) - \mathrm{i}v(x, y)$ と分けて考え，この分け方によって，(u, v) をベクトル場と考えたとき，次の積分

$$\iint_{D^1} \mathrm{rot}(u, v)dxdy + \mathrm{i}\iint_{D^1} \mathrm{div}(u, v)dxdy$$

を考える。ただし，$\mathrm{rot}(u, v) = \dfrac{\partial v}{\partial x} - \dfrac{\partial u}{\partial y}$, $\mathrm{div}(u, v) = \dfrac{\partial u}{\partial x} + \dfrac{\partial v}{\partial y}$ と定義する。
空間 2 次元のストークスの定理（または，空間 2 次元のガウスの発散定理）を用いて，この積分を計算し，$\oint_{S^1} g(z)dz$ との関係について述べよ。ただし，D^1 は原点を中心とする半径 1 の円板を表わす。また，u, v は C^1 級とし，線要素については，$dz = dx + \mathrm{i}dy$ となることに注意する。

問 5　$g(z) = f(z)$ として問 4 の結果を用いて，問 3 の計算結果の意味を述べよ。

問題 [16]

実変数 $x(t)$ に関する線形微分方程式

$$\frac{d^2x}{dt^2} = -2\frac{dx}{dt} - 50x + f(t)$$

について，以下の問いに答えよ。

問 1　$f(t) = 0$ の場合の一般解を求めよ。

問 2　$f(t) = \sin\omega t$ とした場合の一般解を求めよ。

問 3　時間が十分経過した後の $x(t)$ の平均 2 乗振幅

$$\langle x^2 \rangle = \lim_{T\to\infty} \frac{1}{T} \int_0^T x(t)^2 dt$$

を最大にする ω と，そのときの $\langle x^2 \rangle$ を求めよ。

問題 [17]

次のプログラムを読んで，以下の問いに答えよ。

```
#include <stdio.h>
#include <math.h>

int main()
 {
        double epsilon=0.001;
        double dt=0.1;
        double x0,x1;

        x1=0.0;
        do{
              x0=x1;
              x1=x0+dt*(1.0-x0);
        }while(fabs(x1-x0)>=epsilon);
        printf("%lf\n",x1);
}
```

ただし，fabs(x) は変数 x の絶対値を出力する。

問 1　このプログラムはある微分方程式をオイラー差分法によって数値的に解いている。元となる微分方程式を書け。

問 2　このプログラムを実行したとき，変数 x1 の変遷を始めから 3 つ書け。

問 3　このプログラムを実行したとき，文 x1=x0+dt*(1.0-x0); は何回実行されるか。ただし，$\log_{10} 3 = 0.477$ を用いてよい。

問題 [18]

生物の生理システムの恒常性維持において,「幹細胞」と呼ばれる未分化細胞が重要な役割を担っている。幹細胞は，自己複製により，自身と同じ能力を維持する細胞を増殖させることが可能で，また複数種類の前駆細胞並びに分化細胞に分化することも可能な能力を持つ細胞であり，様々な動植物で存在が確認されている。細胞が消耗される組織においては，常に幹細胞から新しい細胞の供給を受けることによって，細胞の置き換わりが起こり，組織としての機能を維持することができる。恒常性維持のためには，幹細胞の特性である自己複製能を適切に制御し，幹細胞数を調節する必要がある。この幹細胞数の変動についての数理モデルに関する以下の問いに答えよ。

問1 時刻 t における幹細胞数を $N(t)$ と表す。時刻 t から微小時間 Δt の間に死滅する幹細胞数を $\delta \Delta t N(t)$ とする。また，この時間内に細胞分裂1回を起こす幹細胞数を $\alpha \Delta t N(t)$ とし，2回以上の分裂を起こす幹細胞はないものとする。このとき，細胞分裂によって，2つの分化細胞に分裂した幹細胞の割合を p_0，1つの分化細胞と1つの幹細胞に分裂した幹細胞の割合を p_1，2つの幹細胞に分裂した幹細胞の割合を p_2 とするとき，時刻 $t+\Delta t$ における幹細胞数 $N(t+\Delta t)$ を $N(t)$，α，δ，p_0，p_2，Δt を用いて表せ。ただし，α，δ は正定数，p_0，p_1，p_2 は非負なる定数であり，$p_0 + p_1 + p_2 = 1$ を満たす。

問2 $N(t)$ の時間変動を表す微分方程式を導出せよ。

問3 幹細胞数を一定数に保つためには，$p_2 > p_0$ でなければならないことを説明せよ。

問4 分化細胞と幹細胞の死滅率 δ が等しく，分化細胞は分裂をしないものとする。時刻 t における分化細胞数を $Q(t)$ と表すとき，幹細胞数と分化細胞数の和 $N(t) + Q(t)$ が常に一定数 M (> 0) に保たれるならば，幹細胞数は p_0，p_1，p_2 の値によらない定数であることを示せ。

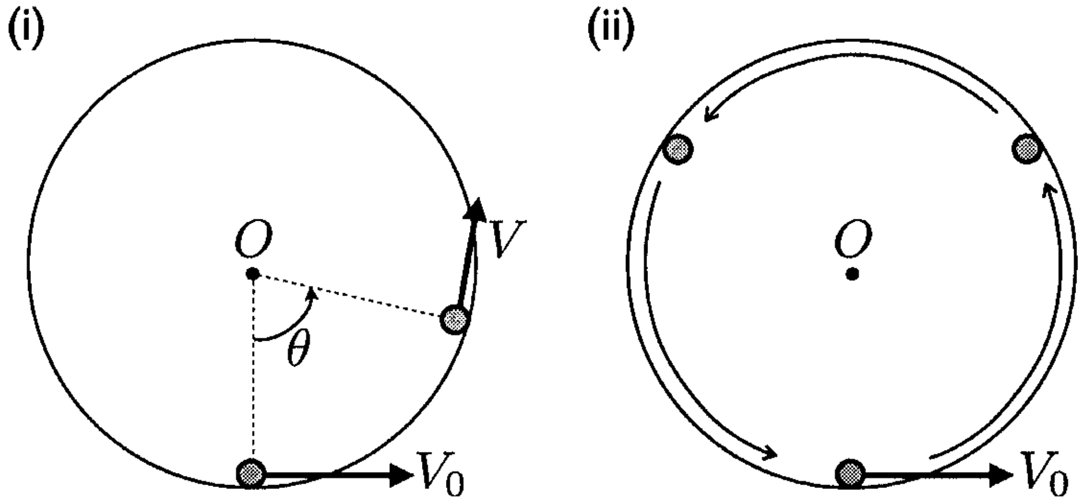
問題 [19]

図のように一様で下向きの重力場（重力加速度は g）中にある鉛直面内に中心 O 半径 r の円がある。この円周の内側を質量 m の小さな玉が滑って移動する（摩擦は無視できるとする）。初期時刻 $t=0$ における玉の位置は，円周の最下部であるとし，そのときの速度は大きさが V_0 で水平右方向を向いているとする。以下の問いに答えよ。

問 1　図 (i) のように鉛直下方から測って角 θ の位置に来た時の玉の速さ V を求めよ。ただし，このとき玉は円周に接触したままであるとする。

問 2　問 1 と同じ位置に玉があるとき，玉が円周から受ける垂直抗力 N を求めよ。

問 3　初速 V_0 が十分大きいと，この玉は図 (ii) のように円周から離れずに一周し元の位置に戻って来る。このような運動をするための最小の初速 $\overline{V}_0$ を求めよ。



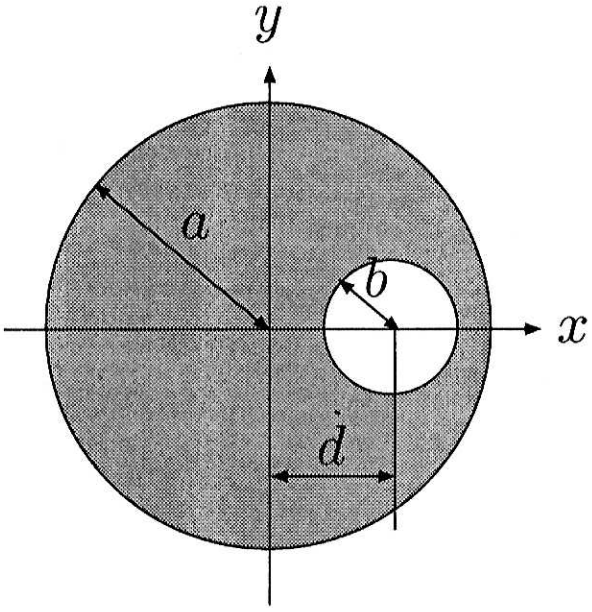
問題 [20]

無限に長い半径 a の円柱導体に，その軸から d の距離に平行な軸をもつ半径 b の穴があいている $(b < a - d)$。図のように円柱導体の垂直断面に (x, y) 平面をとり，円柱の軸に原点を，原点から穴の軸方向に x 軸をとり，直交座標系 (x, y, z) が右手系となるように z 軸をとる。この導体に電流密度 J の一様な電流を z 軸正方向に流すとき，この電流がつくる磁場について，以下の問いに答えよ。ただし，透磁率はどこでも μ_0 とする。

問 1　穴がないとき $(b = 0)$，円柱導体の内外にできる磁束密度 $\boldsymbol{B}$ を求め，x 軸上の点 $(x, 0)$ にできる磁束密度の x, y 成分 B_x と B_y を x の関数として表せ。

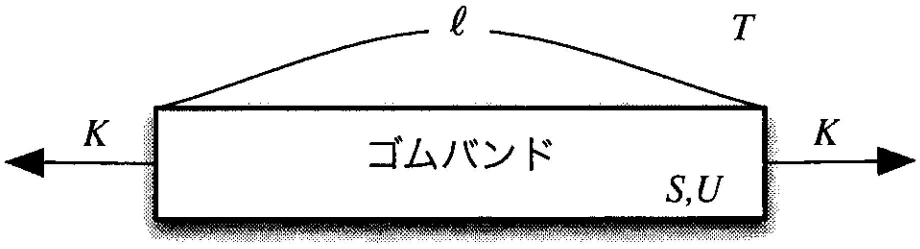
問 2　穴があいているとき $(b > 0)$，x 軸上の点 $(x, 0)$ にできる磁束密度の y 成分 B_y を求めよ。

問 3　問 2 の結果の (x, B_y) のグラフの概形を描け。



問題 [21]

ゴムの熱力学的性質を考える。ゴムバンドに外力を加えて可逆的に引き伸ばす。ゴムの長さを ℓ，両端に加わる外力を K とする。以下の問いに答えよ。



問 1　ゴムの長さを $d\ell$ だけ伸ばせば，ゴムに対して成される仕事は $Kd\ell$ である。ゴムのエントロピーを S，内部エネルギーを U，絶対温度を T とする。エントロピー変化 dS と dU，$d\ell$ の間に成り立つ熱力学関係式を書け。

問 2　ヘルムホルツの自由エネルギー $F = U - TS$ を導入する。自由エネルギーの変化 dF と dT，$d\ell$ の間に成り立つ熱力学関係式を書け。

問 3　マックスウェル関係式

$$-\left(\frac{\partial S}{\partial \ell}\right)_T = \left(\frac{\partial K}{\partial T}\right)_\ell$$

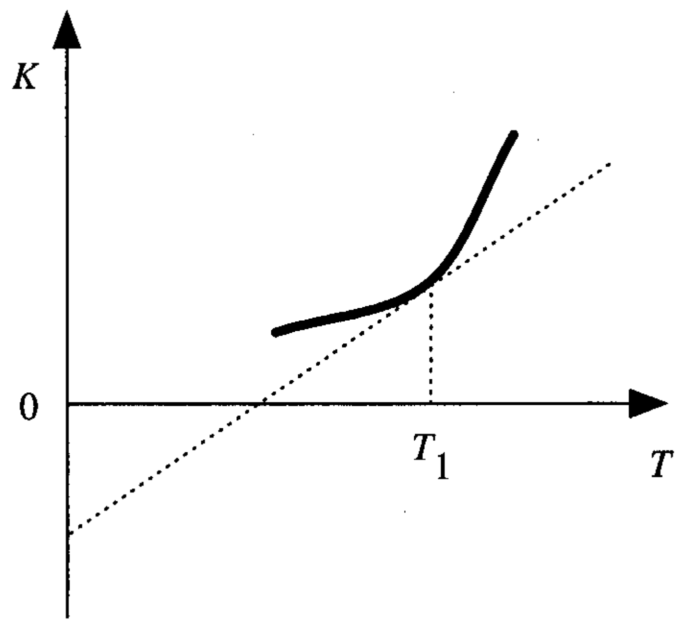
を示せ。

問 4　関係式

$$\left(\frac{\partial U}{\partial \ell}\right)_T = K - T\left(\frac{\partial K}{\partial T}\right)_\ell$$

を示せ。

問 5　ゴムバンドの長さ ℓ を一定に保ちつつ外力 K を測定したところ，外力 K と絶対温度 T の間には図のような関係があった。温度 $T = T_1$ において，ゴムバンドを伸長すると，そのエントロピー S と内部エネルギー U は増加するか減少するかを述べよ。



問題 [22]

ポテンシャル場 $V(x)$ のもとでの 1 次元のシュレディンガー方程式

$$\hat{H}\psi(x) = -\frac{\hbar^2}{2m}\frac{d^2}{dx^2}\psi(x) + V(x)\psi(x) = E\psi(x)$$

について，以下の問いに答えよ。ただし，各固有状態 $\psi_n(x)$ （$n = 0, 1, 2, \ldots$）は，境界条件

$$\psi_n(\pm\infty) = 0, \quad \left.\frac{d\psi_n(x)}{dx}\right|_{x=\pm\infty} = 0,$$

および，規格化条件

$$\int_{-\infty}^{\infty} |\psi_n(x)|^2 dx = 1$$

を満たしているものとする。また，ハミルトニアン $\hat{H}$ がエルミート演算子であることを前提としてよい。

問 1　すべての固有値が実数となることを示せ。

問 2　固有状態の縮退はないこと，すなわち，各固有エネルギーに対して固有状態は定数倍を除いて 1 つだけ存在することを示せ。

問 3　異なる固有値に対応する固有状態は互いに直交することを示せ。

問 4　ポテンシャル場が位置 x に関する偶関数であること，すなわち，$V(x) = V(-x)$ が成り立つならば，各固有状態は，偶関数か奇関数のいずれかになることを示せ。