波動方程式

世界は波動で満ちている

波紋

ウェーブ

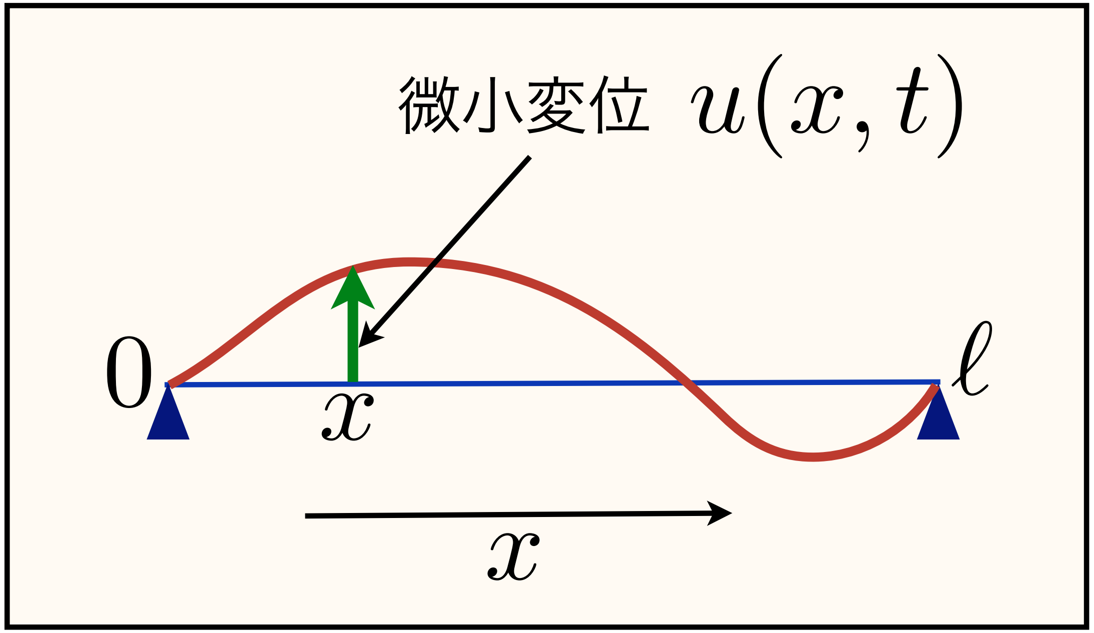
弦で音を出す楽器あれこれ







両端を固定した弦の振動



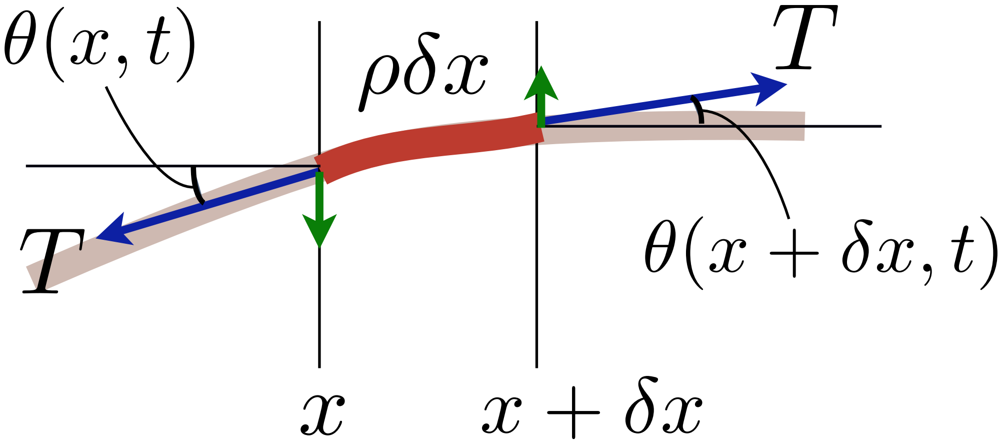
ρ: 弦の線密度

T: 弦の張力

一定

$u(x,t)$ の満たすべき方程式は？

弦の小片の運動方程式



位置 x 時刻 t において弦の接線と水平軸のなす角を $\theta(x,t)$ とする．

質量：$\rho\delta x$　　鉛直方向加速度：$\dfrac{\partial^2 u}{\partial t^2}$

Ex. 5-1

この小片の鉛直方向の運動方程式を求めよ．

$$\rho\delta x\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = T\sin\theta(x+\delta x,t) - T\sin\theta(x,t)$$

波動方程式

Ex. 5-2

微小変位を考えているので θ は十分小さいと考えてよい.

このとき $\rho\delta x \dfrac{\partial^2 u}{\partial t^2} = T\sin\theta(x+\delta x, t) - T\sin\theta(x,t)$ を

$\dfrac{\partial u}{\partial x}$ を用いた式に変形せよ.

θ が小さいとき $\sin\theta \simeq \theta \simeq \tan\theta = \dfrac{\partial u}{\partial x}$

$$\rho\delta x \frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = T\left(\frac{\partial u}{\partial x}(x+\delta x, t) - \frac{\partial u}{\partial x}(x,t)\right) \xrightarrow[\delta x \to 0]{} \frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = \frac{T}{\rho}\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}$$

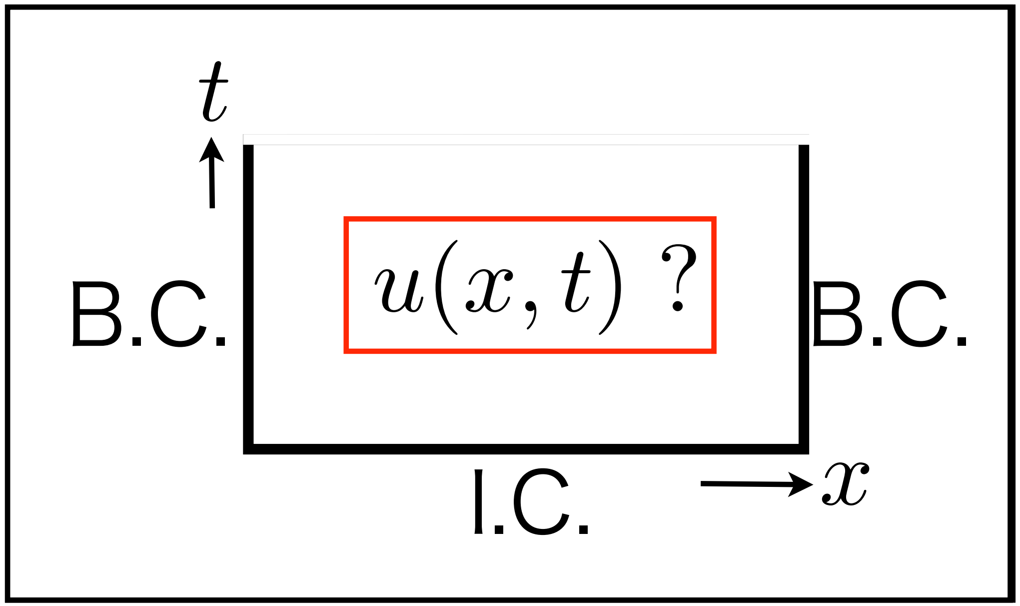
波動方程式 $\boxed{\dfrac{\partial^2 u}{\partial t^2} = c^2 \dfrac{\partial^2 u}{\partial x^2}}$ $\quad c = \sqrt{T/\rho}$

初期値境界値問題 (ディリクレ条件)

$$\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = c^2 \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} \qquad \text{for} \;\; 0 < x < \ell, \;\; t > 0$$

$$u(0,t) = u(\ell,t) = 0 \qquad \text{for} \;\; t > 0 \quad \Longrightarrow \text{B.C.}$$

$$u(x,0) = f(x), \;\; \frac{\partial u}{\partial t}(x,0) = g(x) \qquad \text{for} \;\; 0 < x < \ell \quad \Longrightarrow \text{I.C.}$$



初期値が静止正弦波である解

特別な初期値に対する解を求める.

⇒ 初期値が m モードの静止正弦波

$$\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = c^2 \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} \qquad \text{for} \;\; 0 < x < \ell, \; t > 0$$

$$u(0,t) = u(\ell,t) = 0 \qquad \text{for} \;\; t > 0$$

$$u(x,0) = \sin\frac{\pi m x}{\ell} \quad (m = 1, 2, \cdots)$$

$$\frac{\partial u}{\partial t}(x,0) = 0$$

$$\text{for} \;\; 0 < x < \ell$$

変数分離法

Ex. 5-3

$u_m(x,t) = a_m(t)\sin\frac{\pi m x}{\ell}$　という解の形を仮定する

とき $a_m(t)$ の満たす方程式（初期条件も）を求めよ.

$$\frac{d^2 a_m}{dt^2}\sin\frac{\pi m x}{\ell} = -c^2\left(\frac{\pi m}{\ell}\right)^2 a_m \sin\frac{\pi m x}{\ell}$$

$$\boxed{\begin{aligned} &\frac{d^2 a_m}{dt^2} = -\left(\frac{\pi m c}{\ell}\right)^2 a_m \\ &a_m(0) = 1,\ \frac{da_m}{dt}(0) = 0 \end{aligned}}$$

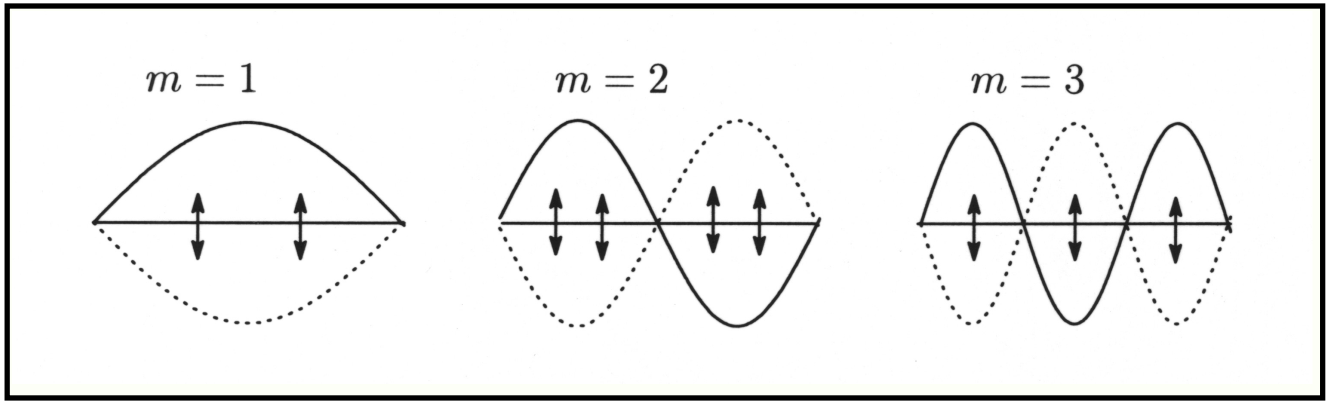
m モード定在波

Ex. 5-4

$u_m(x,t) \quad (m = 1, 2, \cdots)$を求めよ.

$$a_m(t) = \cos\frac{\pi m c t}{\ell} \quad \text{であるので}$$

$$u_m(x,t) = \cos\frac{\pi m c t}{\ell}\sin\frac{\pi m x}{\ell}$$



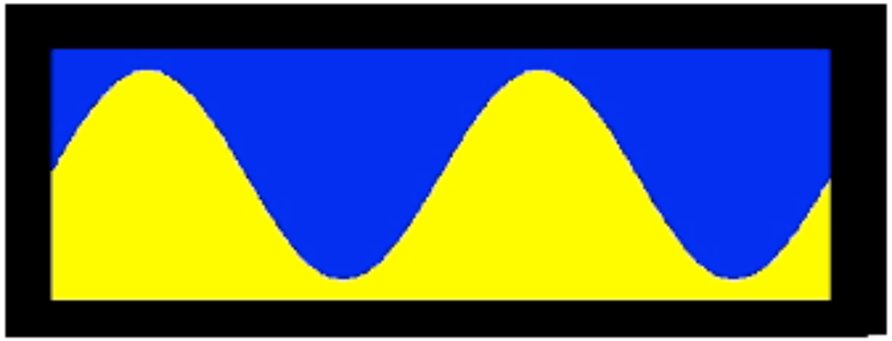
➡ m モード定在波

定在波いろいろ

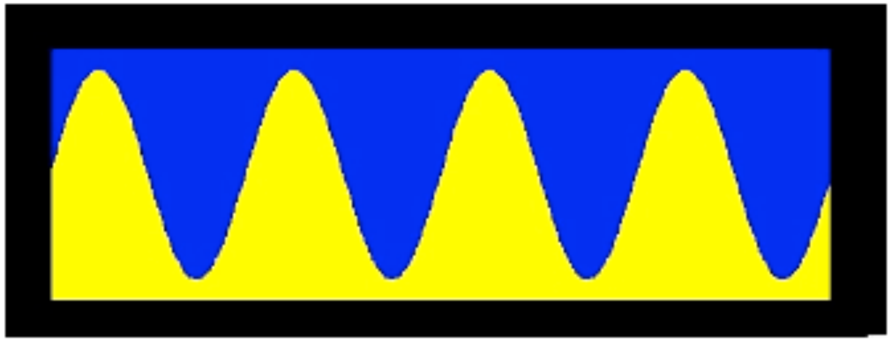
1モード

2モード

4モード



8モード



定在波の振動数

Ex. 5-5

m モード定在波の振動数 f_m を弦の線密度 ρ や張力 T を用いて書け．弦楽器の音の高さとの関係について考えてみよ．

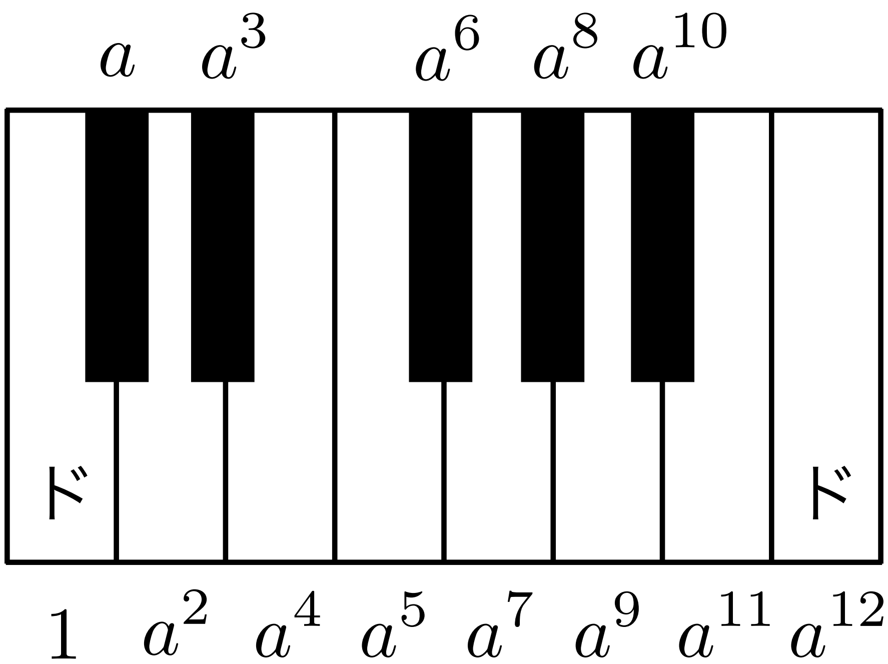
$$u_m(x,t) = \cos\frac{\pi mct}{\ell}\sin\frac{\pi mx}{\ell}$$ より

角振動数 $\omega_m = \dfrac{\pi mc}{\ell}$

$$\rightarrow \quad f_m = \frac{\omega_m}{2\pi} = \frac{m}{2\ell}\sqrt{\frac{T}{\rho}} = mf_1$$ ただし $\boxed{f_1 = \dfrac{1}{2\ell}\sqrt{\dfrac{T}{\rho}}}$

平均律音階

周波数比



オクターブを１２の等しい半音程に分割する

周波数は等比数列！

$$a^{12} = 2$$

$$a = 2^{1/12}$$ 無理数

長所：移調自由自在

短所：オクターブ以外は決して整数比にならない

初期値境界値問題 (ノイマン条件)

Ex. 5-6

ノイマン条件のもとで初期値境界値問題を書き下してみよ．

$$\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = c^2 \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} \qquad \text{for } \ 0 < x < \ell,\ t > 0$$

$$\frac{\partial u}{\partial x}(0, t) = 0,\ \frac{\partial u}{\partial x}(\ell, t) = 0 \qquad \text{for } \ t > 0$$

$$u(x, 0) = f(x),\ \ \frac{\partial u}{\partial t}(x, 0) = g(x) \qquad \text{for } \ 0 < x < \ell$$

ディリクレ条件のときと同様に，特別な初期値

$$u(x, 0) = \cos \frac{\pi m x}{\ell},\ \ \frac{\partial u}{\partial t}(x, 0) = 0$$

を満たす解を考える．

初期値境界値問題 (ノイマン条件)

Ex. 5-7

前問の方程式の m モード定在波を表す解を求めよ.

Hint

$$u_m(x,t) = a_m(t)\cos\frac{\pi m x}{\ell}$$ という解の形を仮定する

ただし $m = 0, 1, 2, \cdots$

ノイマン条件のときは
0 モードを忘れないこと！

$$\frac{d^2 a_m}{dt^2} = -\left(\frac{\pi m c}{\ell}\right)^2 a_m$$

$$a_m(0) = 1,\ \frac{da_m}{dt}(0) = 0$$

$$u_m(x,t) = \cos\frac{\pi m c t}{\ell}\cos\frac{\pi m x}{\ell} \quad (m = 0, 1, 2, \cdots)$$

力学的エネルギーの保存則

Ex. 5-8

区間 $[0,\ell]$上で波動方程式 $\dfrac{\partial^2 u}{\partial t^2} = c^2 \dfrac{\partial^2 u}{\partial x^2}$ を考える.

境界条件はディリクレ条件またはノイマン条件であるとする. このとき

$$E = \int_0^\ell \left[\frac{1}{2} \left(\frac{\partial u}{\partial t} \right)^2 + \frac{c^2}{2} \left(\frac{\partial u}{\partial x} \right)^2 \right] dx$$

が保存量であることを示せ.

$$\frac{dE}{dt} = \int_0^\ell \left[\frac{\partial u}{\partial t} \frac{\partial^2 u}{\partial t^2} + c^2 \frac{\partial u}{\partial x} \frac{\partial^2 u}{\partial t \partial x} \right] dx = c^2 \int_0^\ell \left[\frac{\partial u}{\partial t} \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial u}{\partial x} \frac{\partial^2 u}{\partial t \partial x} \right] dx$$

$$= c^2 \int_0^\ell \frac{\partial}{\partial x} \left(\frac{\partial u}{\partial t} \frac{\partial u}{\partial x} \right) dx = c^2 \left[\frac{\partial u}{\partial t} \frac{\partial u}{\partial x} \right]_{x=0}^{\ell} = 0$$

線形重ね合わせ

区間 $[0,\ell]$ 上で波動方程式の初期値境界値問題を考える.

$u_1(x,t), u_2(x,t)$ がそれぞれ初期条件

$u_i(x,0)=f_i(x),\ \dfrac{\partial u_i}{\partial t}(x,0)=g_i(x)\ \ (i=1,2)$ を満たす解である時

それらの 1 次結合 $u=a_1u_1+a_2u_2$ は

初期条件 $u(x,0)=f(x),\ \dfrac{\partial u}{\partial t}(x,0)=g(x)$ ただし

$f(x)=a_1f_1(x)+a_2f_2(x),\ \ g(x)=a_1g_1(x)+a_2g_2(x)$

を満たす初期値境界値問題の解である.

Ex. 5-9　上のことを確かめよ.

$$\frac{\partial^2 u}{\partial t^2}=\frac{\partial^2}{\partial t^2}(a_1u_1+a_2u_2)=a_1\frac{\partial^2 u_1}{\partial t^2}+a_2\frac{\partial^2 u_2}{\partial t^2}=a_1c^2\frac{\partial^2 u_1}{\partial x^2}+a_2c^2\frac{\partial^2 u_2}{\partial x^2}$$

$$=c^2\left[a_1\frac{\partial^2 u_1}{\partial x^2}+a_2\frac{\partial^2 u_2}{\partial x^2}\right]=c^2\frac{\partial^2}{\partial x^2}(a_1u_1+a_2u_2)=c^2\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}$$

以下略

線形重ね合わせ

Ex. 5-10　次の初期値境界値問題を解け.

$$\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = c^2 \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} \qquad \text{for } \ 0 < x < \ell,\ t > 0$$

$$u(0,t) = u(\ell,t) = 0 \qquad \text{for } \ t > 0$$

$$u(x,0) = 2\sin\frac{\pi x}{\ell} - 3\sin\frac{2\pi x}{\ell} + \sin\frac{3\pi x}{\ell}$$

$$\frac{\partial u}{\partial t}(x,0) = 0 \qquad \text{for } \ 0 < x < \ell$$

初期値 $u(x,0) = \sin\frac{\pi m x}{\ell}$, $\frac{\partial u}{\partial t}(x,0) = 0$ に対する解 $u_m(x,t)$ は

$u_m(x,t) = \cos\frac{\pi m c t}{\ell}\sin\frac{\pi m x}{\ell}$　で与えられるので

$$\begin{aligned} u(x,t) &= 2u_1(x,t) - 3u_2(x,t) + u_3(x,t) \\ &= 2\cos\frac{\pi c t}{\ell}\sin\frac{\pi x}{\ell} - 3\cos\frac{2\pi c t}{\ell}\sin\frac{2\pi x}{\ell} + \cos\frac{3\pi c t}{\ell}\sin\frac{3\pi x}{\ell} \end{aligned}$$

一般の初期値（静止初期条件）

Ex. 5-11

次の初期値境界値問題をフーリエ級数を用いて解け.

$$\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = c^2 \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} \qquad \text{for} \;\; 0 < x < \ell,\ t > 0$$

$$u(0,t) = u(\ell,t) = 0 \qquad \text{for} \;\; t > 0$$

$$u(x,0) = x(\ell - x),\ \frac{\partial u}{\partial t}(x,0) = 0 \qquad \text{for} \;\; 0 < x < \ell$$

$$u(x,0) = \frac{8\ell^2}{\pi^3} \sum_{n:odd} \frac{1}{n^3} \sin \frac{\pi n x}{\ell}$$

$$u(x,t) = \frac{8\ell^2}{\pi^3} \sum_{n:odd} \frac{1}{n^3} \cos \frac{\pi n c t}{\ell} \sin \frac{\pi n x}{\ell}$$

一般の初期値

Ex. 5-12

$$\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = c^2 \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} \qquad \text{for} \;\; 0 < x < \ell, \; t > 0$$

$$u(0,t) = u(\ell,t) = 0 \qquad \text{for} \;\; t > 0$$

$$u(x,0) = f(x), \; \frac{\partial u}{\partial t}(x,0) = g(x) \qquad \text{for} \;\; 0 < x < \ell$$

において初期値が次のフーリエサイン展開で与えられる時

$$f(x) = \sum_{m=1}^{\infty} b_m \sin \frac{\pi m x}{\ell}, \; g(x) = \sum_{m=1}^{\infty} b'_m \sin \frac{\pi m x}{\ell}$$

解 $u(x,t)$ を級数の形で求めてみよ.

$$u(x,t) = \sum_{m=1}^{\infty} \left(b_m \cos \frac{\pi m c t}{\ell} + b'_m \frac{\ell}{\pi m c} \sin \frac{\pi m c t}{\ell} \right) \sin \frac{\pi m x}{\ell}$$

$$\phi_m(x,t) = \cos\frac{\pi mct}{\ell}\sin\frac{\pi mx}{\ell} \qquad \psi_m(x,t) = \sin\frac{\pi mct}{\ell}\sin\frac{\pi mx}{\ell}$$

はどちらも波動方程式の解なので

$$u(x,t) = \sum_{m=1}^{\infty}\left(b_m\cos\frac{\pi mct}{\ell} + b'_m\frac{\ell}{\pi mc}\sin\frac{\pi mct}{\ell}\right)\sin\frac{\pi mx}{\ell}$$

は波動方程式の解である.

境界条件は元々オーケー.

$$\frac{\partial u}{\partial t}(x,t) = \sum_{m=1}^{\infty}\left(-b_m\frac{\ell}{\pi mc}\sin\frac{\pi mct}{\ell} + b'_m\cos\frac{\pi mct}{\ell}\right)\sin\frac{\pi mx}{\ell}$$

$$u(x,0) = \sum_{m=1}^{\infty} b_m\sin\frac{\pi mx}{\ell} = f(x) \qquad \frac{\partial u}{\partial t}(x,0) = \sum_{m=1}^{\infty} b'_m\sin\frac{\pi mx}{\ell} = g(x)$$

初期条件もオーケー.

初期値境界値問題の解の一般形

$$u(x,t) = \sum_{m=1}^{\infty} \left(b_m \cos \frac{\pi mct}{\ell} + b'_m \frac{\ell}{\pi mc} \sin \frac{\pi mct}{\ell} \right) \sin \frac{\pi mx}{\ell}$$

$$= \sum_{m=1}^{\infty} c_m \sin \left(\frac{\pi mct}{\ell} + \phi_m \right) \sin \frac{\pi mx}{\ell}$$

$$\boxed{\begin{array}{c} u(x,t) = \displaystyle\sum_{m=1}^{\infty} c_m \sin (2\pi f_m t + \phi_m) \sin \frac{\pi mx}{\ell} \\ \text{ただし} \quad f_m = \dfrac{m}{2\ell}\sqrt{\dfrac{T}{\rho}} = m f_1 \end{array}}$$

→ 弦の発する音が楽音であることがわかる.

境界のない場合

領域が R (実数) 全体であったり, 周期境界条件を考える場合は, 領域の境界が存在しない.

⇒ 進行波が存在する.

Ex. 5-13

任意の関数 $f(x)$ に対し

$$u(x,t) = f(x-ct) \text{ と } u(x,t) = f(x+ct)$$

は波動方程式の解であることを示せ.

⇒ $\boxed{\text{速度 } \pm c \text{ の進行波解}}$

右行きの波と左行きの波の合成

Ex. 5-14

実数 $\mathbf{R}$ 上で次の波動方程式を考える.

$$\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = c^2 \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} \qquad \text{for} \quad -\infty < x < \infty,\ t > 0$$

$$u(x,0) = f(x), \quad \frac{\partial u}{\partial t}(x,0) = 0 \qquad \text{for} \quad -\infty < x < \infty$$

進行波解の重ね合わせで解を求めよ.

$$u(x,t) = Af(x-ct) + Bf(x+ct)$$

$$\frac{\partial u}{\partial t}(x,t) = -cAf'(x-ct) + cBf'(x+ct)$$

$$f(x) = u(x,0) = (A+B)f(x) \quad \longrightarrow \quad A + B = 1$$

$$0 = \frac{\partial u}{\partial t}(x,0) = -c(A-B)f'(x) \quad \longrightarrow \quad A - B = 0$$

$$u(x,t) = \frac{1}{2}f(x+ct) + \frac{1}{2}f(x-ct)$$

一般の初期値問題の解

Ex. 5-15

実数 $\mathbf{R}$ 上で波動方程式を考える.

$$\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = c^2 \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} \qquad \text{for} \quad -\infty < x < \infty,\ t > 0$$

$$u(x,0) = f(x), \quad \frac{\partial u}{\partial t}(x,0) = g(x) \qquad \text{for} \quad -\infty < x < \infty$$

$$u(x,t) = \frac{1}{2}f(x+ct) + \frac{1}{2}f(x-ct) + \frac{1}{2c}\int_{x-ct}^{x+ct} g(\xi)d\xi$$

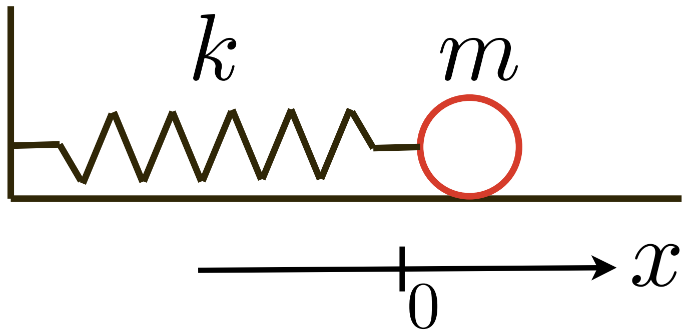
が解であることを確かめよ.

$v(x,t) = \dfrac{1}{2c}\displaystyle\int_{x-ct}^{x+ct} g(\xi)d\xi$ が波動方程式 $\dfrac{\partial^2 v}{\partial t^2} = c^2 \dfrac{\partial^2 v}{\partial x^2}$ と

初期条件 $v(x,0) = 0,\ \dfrac{\partial v}{\partial t}(x,0) = g(x)$ を満たすことを示せばよい.

$v(x,t) = \dfrac{1}{2c}\displaystyle\int_0^{x+ct} g(\xi)d\xi - \dfrac{1}{2c}\displaystyle\int_0^{x-ct} g(\xi)d\xi$ と変形してから確認せよ.

バネ-ダンパ系：２つの極端な場合



$$m\frac{d^2x}{dt^2} = -kx - \gamma\frac{dx}{dt}$$

Case 1: 抵抗力 $\ll$ 慣性力

$$m\frac{d^2x}{dt^2} = -kx \Rightarrow x(t) = A\sin(\omega t + \theta_0) \Rightarrow$$

力学的エネルギーは保存

Case 2: 抵抗力 $\gg$ 慣性力

$$\gamma\frac{dx}{dt} = -kx \Rightarrow x(t) = x_0 e^{-\frac{k}{\gamma}t} \Rightarrow$$

力学的エネルギーは散逸

波動方程式と拡散方程式

m モード解　$u_m(x,t) = a_m(t)\sin\dfrac{\pi m x}{\ell}$　の挙動

Ex. 5-16

波動方程式と拡散方程式（いずれもディリクレ条件）のそれぞれに上の式を代入することにより $a_m(t)$ の満たすべき方程式を求め，比較せよ．

$$\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = c^2\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} \quad \Rightarrow \quad \frac{d^2 a_m}{dt^2} = -\left(\frac{\pi m c}{\ell}\right)^2 a_m \quad \Rightarrow \quad \text{Case 1}$$

$$\frac{\partial u}{\partial t} = D\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} \quad \Rightarrow \quad \frac{d a_m}{dt} = -D\left(\frac{\pi m}{l}\right)^2 a_m \quad \Rightarrow \quad \text{Case 2}$$

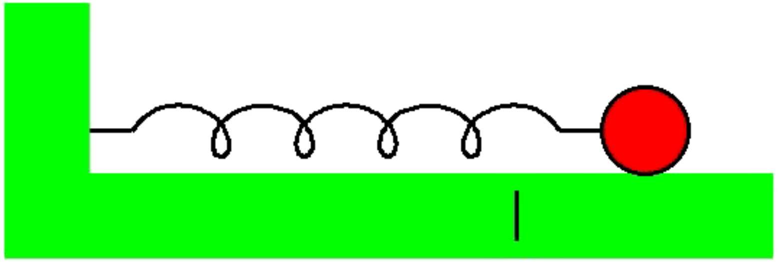
バネ振子と波動方程式・拡散方程式

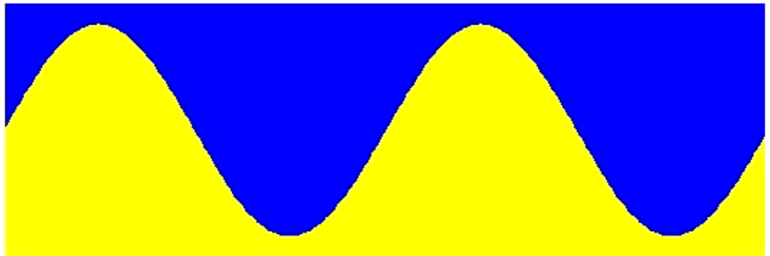
Case 1

$$m\frac{d^2x}{dt^2} = -kx$$

波動方程式

振動



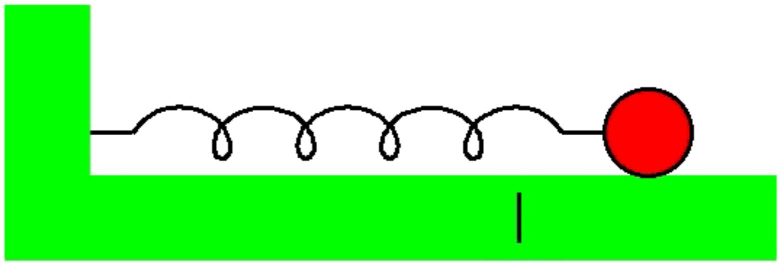


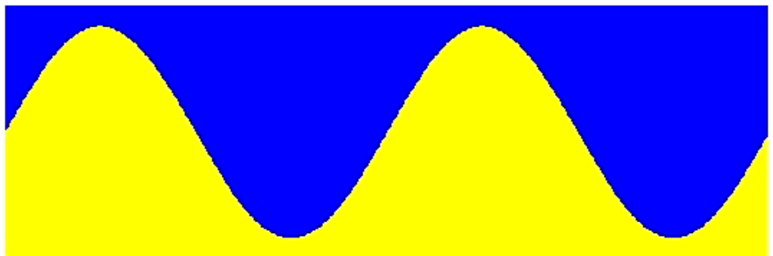
Case 2

$$c\frac{dx}{dt} = -kx$$

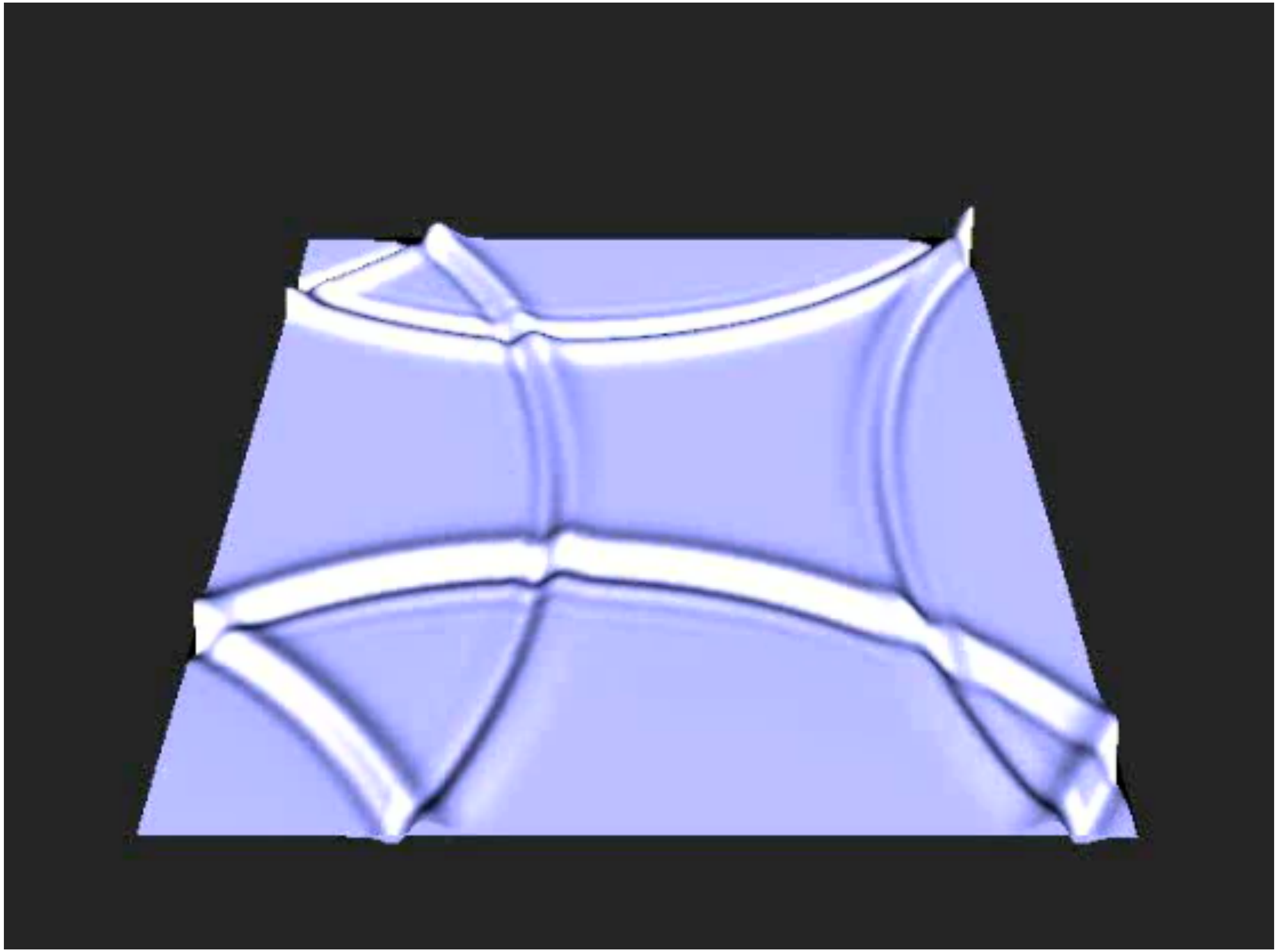
拡散方程式

減衰





波動方程式のシミュレーション



初期値境界値問題の計算スキーム

波動方程式

$$\frac{u_i^{n-1} - 2u_i^n + u_i^{n+1}}{\delta t^2} = c^2 \frac{u_{i-1}^n - 2u_i^n + u_{i+1}^n}{\delta x^2}$$

$$(i = 1, 2, \cdots, I; \quad n = 0, 1, \cdots)$$

境界条件

ディリクレ条件 $u_0^n = -u_1^n,\ u_{I+1}^n = -u_I^n$

ノイマン条件 $u_0^n = u_1^n,\ u_{I+1}^n = u_I^n$ $\quad (n = 0, 1, \cdots)$

周期境界条件 $u_0^n = u_I^n,\ u_{I+1}^n = u_1^n$

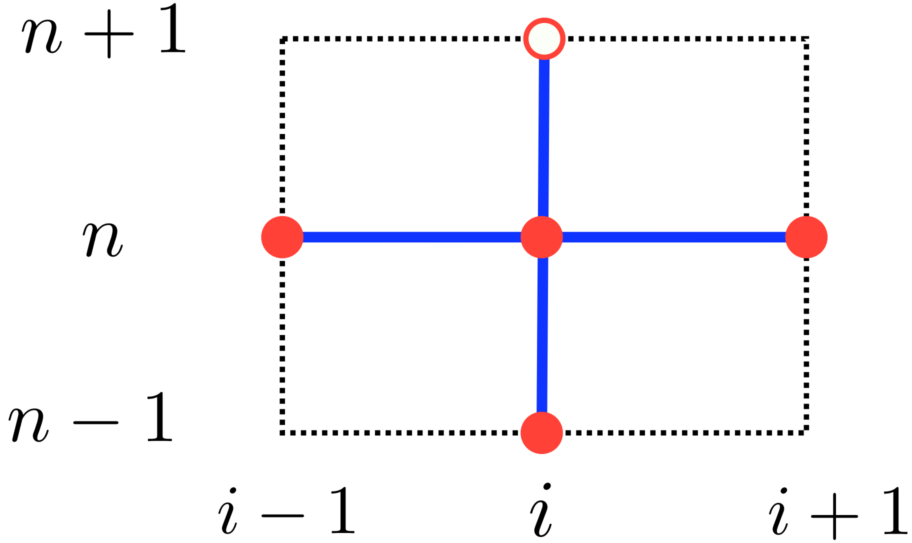
初期条件

$$u_i^0 = f(x_i),\ \frac{u_i^1 - u_i^{-1}}{2\delta t} = g(x_i) \qquad (i = 1, 2, \cdots, I)$$

新しいステップの計算

$\lambda = \dfrac{c\delta t}{\delta x}$ とおくと

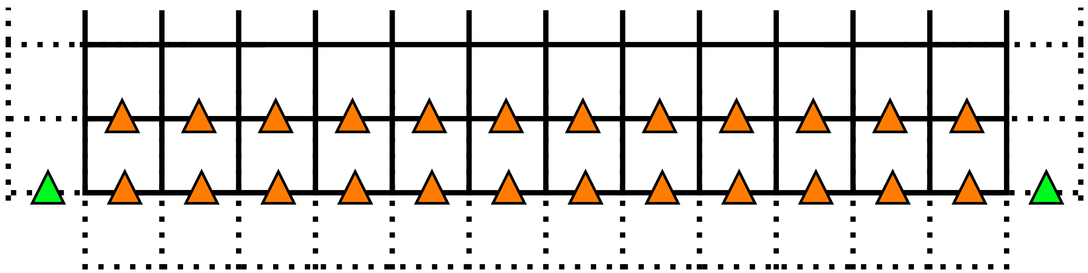
$$\boxed{u_i^{n+1} = 2u_i^n - u_i^{n-1} + \lambda^2 (u_{i-1}^n - 2u_i^n + u_{i+1}^n)}$$



初期条件の処理

まず　$u_i^0 = f(x_i) \ \ (i = 1, \cdots, I)$　とおいて,

境界条件に応じて　$u_0^0,\ u_{I+1}^0$　を計算しておく.



Ex. 5-17

$$\frac{u_i^1 - u_i^{-1}}{2\delta t} = g(x_i)$$

$$u_i^1 = 2u_i^0 - u_i^{-1} + \lambda^2(u_{i-1}^0 - 2u_i^0 + u_{i+1}^0)$$

の２式から u_i^{-1}を消去し u_i^1 を求めよ.

$$u_i^1 = u_i^0 + \delta t \cdot g(x_i) + \frac{\lambda^2}{2}(u_{i-1}^0 - 2u_i^0 + u_{i+1}^0)$$

計算手順

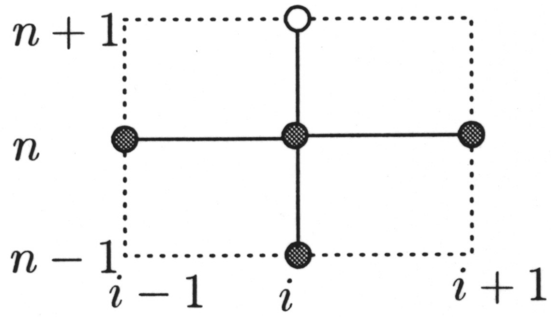
I.C. $u_i^0 \quad (i = 1, 2, \cdots, I)$

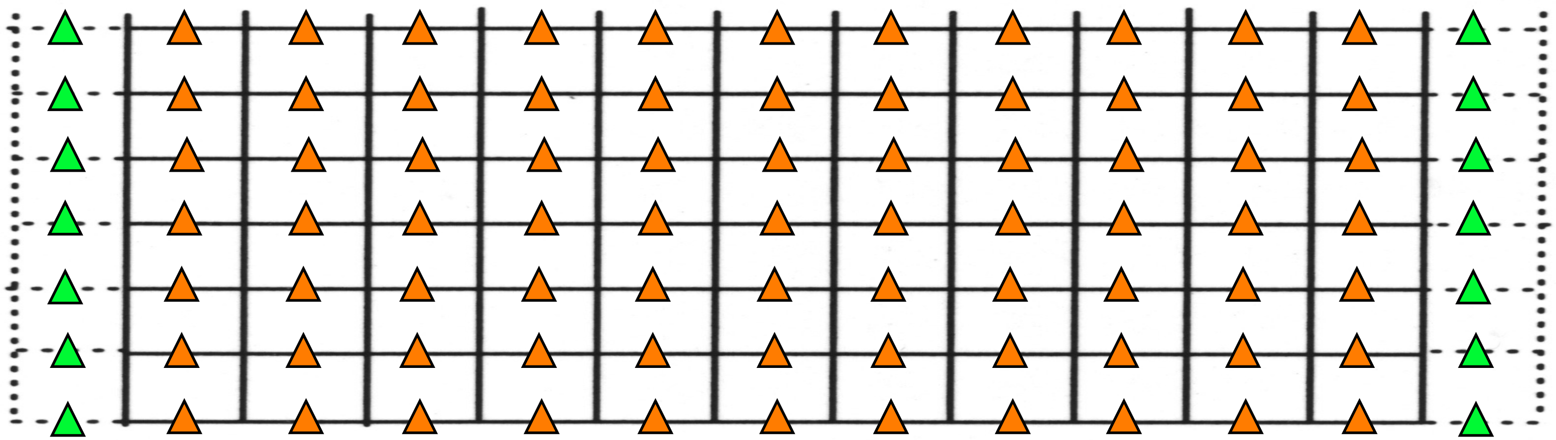
B.C. u_0^0, u_{I+1}^0

I.C. $u_i^1 \quad (i = 1, 2, \cdots, I)$

B.C. u_0^1, u_{I+1}^1

W.Eq. $u_i^2 \quad (i = 1, 2, \cdots, I)$



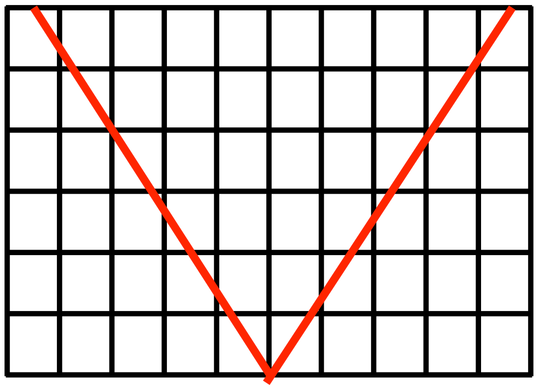


CFL条件 (Courant-Friedrichs-Lewy Condition)

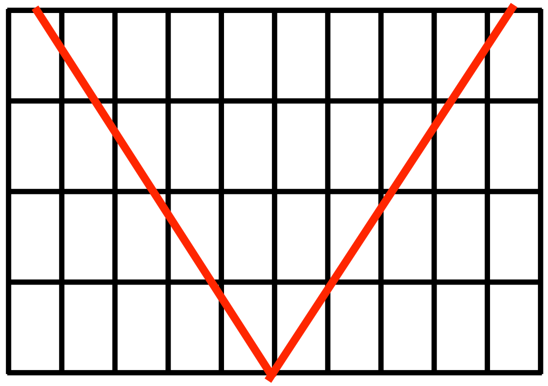
波動方程式 $\dfrac{\partial^2 u}{\partial t^2} = c^2 \dfrac{\partial^2 u}{\partial x^2}$ においてはすべての情報は速度 c で伝達する．

一方，差分解が情報を伝達する最大速度は $\delta x/\delta t$ である．

OK!



NO!



よって，波動方程式を差分方程式で近似するときは

$$\boxed{c \leq \frac{\delta x}{\delta t}}$$

を満たさなくてはならない

→ CFL 条件

von Neumann の安定性解析

Ex. 5-18　CFL 条件を導出せよ．

$u_i^n = \mu^n e^{\sqrt{-1}kx_i}$ を差分方程式に代入する．

$$\frac{\mu^{n+1}e^{\sqrt{-1}kx_i} - 2\mu^n e^{\sqrt{-1}kx_i} + \mu^{n-1}e^{\sqrt{-1}kx_i}}{\delta t^2} = c^2 \frac{\mu^n e^{\sqrt{-1}kx_{i-1}} - 2\mu^n e^{\sqrt{-1}kx_i} + \mu^n e^{\sqrt{-1}kx_{i+1}}}{\delta x^2}$$

$\lambda = \dfrac{c\delta t}{\delta x}$ とおくと　$\mu - 2 + \mu^{-1} = -4\lambda^2 \sin^2 \dfrac{k\delta x}{2}$

$A = \sin^2 \dfrac{k\delta x}{2}$ とおくと　$\mu^2 - 2(1-2\lambda^2 A)\mu + 1 = 0 \ \ (0 \leq A \leq 1)$

この２次方程式の２つの解の積は１なので，相異なる２つの実数解を持つ場合は必ず一方の絶対値は１より大きくなる．そうでない場合は２つの解の絶対値は１になる．よって安定性条件は

$(1-2\lambda^2 A)^2 - 1 \leq 0$ が $0 \leq A \leq 1$ を満たす任意の A に対して成立することである．このことから $\lambda \leq 1$ すなわちCFL条件 $c \leq \dfrac{\delta x}{\delta t}$ が従う．

レポート課題

Report5

ギターでは平均律音階を採用している．このことから第 n フレットの位置 x_n を求めよ．ただし下図のように x 座標軸を定めるものとする．（弦長が L ）